# Глава 6. Криволинейные интегралы.

## 6.1. Криволинейный интеграл I-го рода.

Рассмотрим в трехмерном пространстве с заданной декартовой системой координат $OXYZ$ некоторую кривую Γ (рис 1). Декартовы координаты точек кривой будем обозначать через $(x, y, z)$.

**Определение 1.** Кривая, заданная уравнением

$$\vec{r}(t) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k}, \quad a \le t \le b, \tag{1}$$

называется непрерывной ***кусочно-гладкой***, если функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, и отрезок $[a, b]$ может быть разбит точками $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ на конечное число отрезков таким образом, что на каждом из этих частичных отрезков функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ имеют непрерывные производные, не обращающиеся одновременно в 0.

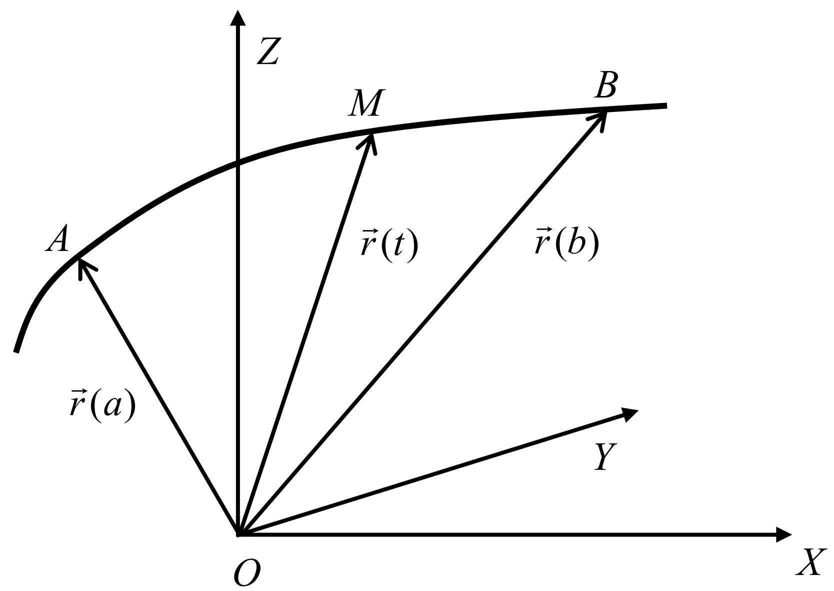


Рис.1. К определению кривой.

Пусть на кривой $\Gamma = \cup AB$, где $\overrightarrow{OA} = \vec{r}(a), \overrightarrow{OB} = \vec{r}(b)$ задана непрерывная функция $f(M)$, где $M(x, y, z)$ – точка на кривой.

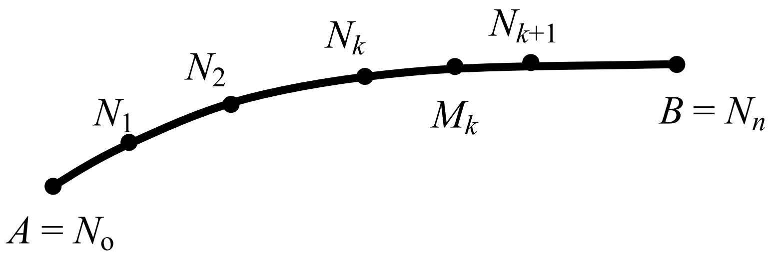


Рис. 2. Разбиение кривой Г.

Зададим разбиение $T$ кривой Г точками $A = N_о, N_1, N_2, \ldots, N_n = B$, (рис. 2). На каждой из дуг $\cup N_k N_{k+1}$ выберем по произвольной точке $M_k$ с координатами $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ и составим интегральную сумму:

$$S_T = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(M_k\right) \cdot \Delta s_k = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_k, \eta_k, \zeta_k\right) \cdot \Delta s_k, \qquad (2)$$

где $\Delta s_k$ – длина дуги $\cup N_k N_{k+1}$.

**Определение 2.** Криволинейным интегралом I-го рода от функции $f(M)$ по кривой Г называется предел интегральной суммы (2) при бесконечном увеличении числа $n$ точек деления $N_k$ и бесконечном уменьшении длин дуг $\cup N_k N_{k+1}$, если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения $T$, ни от выбора точек $M_k$ на дугах:

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \int_\Gamma f(M)ds = \lim_{\max\limits_k \Delta s_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k)\Delta s_k . \qquad (3)$$

Для криволинейного интеграла по замкнутой кривой Г используется иное обозначение:

$$\oint_\Gamma f(M)ds = \oint_\Gamma f(x,y,z)ds .$$

Существование криволинейного интеграла устанавливает следующая теорема:

**Теорема 1.** Если $\Gamma$ – непрерывная кусочно-гладкая кривая и функция $f(M)$ непрерывна на ней, то криволинейный интеграл I-го рода (3) от функции $f(M)$ существует и определен однозначно.

**Теорема 2.** Если кривая $\Gamma$ задана уравнениями (1), а функция $f(M)$ непрерывна на этой кривой, то ***криволинейный интеграл I-го рода*** от функции $f(M)$ находится по формуле

$$\int_{\Gamma} f(M)ds = \int_{\Gamma} f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt. \quad (4)$$

**Замечание.** При использовании формулы (4) следует обращать внимание на то, чтобы при изменении параметра $t$ от $a$ до $b$ дифференциалы $ds$ и $dt$ были неотрицательными, поскольку выражение

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt.$$

задает элемент длины дуги, который отрицательным быть не может.

**ПРИМЕР 1.** Найти интеграл $\int\limits_{\cup AB} \left(x^2 + y^2\right)ds$, где кривая $\Gamma$ – дуга окружности с центром в начале координат и радиуса 1 между точками $A(0, 1)$ и $B(1, 0)$ (рис.3).

Введем на кривой $\Gamma$ параметризацию: $x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0, \pi/2]$. Тогда $x'(t) = -\sin t,\ y'(t) = \cos t,\ ds = \left|\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt\right| = -dt$. Здесь модуль раскрывается со знаком « – » поскольку при интегрировании от точки $A$ до точки $B$ параметр $t$ изменяется в интервале от $\pi/2$ до 0 и, следовательно, $dt < 0$. Применяя формулу (4), получим:

$$\int\limits_{\cup AB}\left(x^2+y^2\right)ds=\int\limits_{\pi/2}^{0}\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)(-dt)=\int\limits_{0}^{\pi/2}dt=\frac{\pi}{2}.\ \blacksquare$$

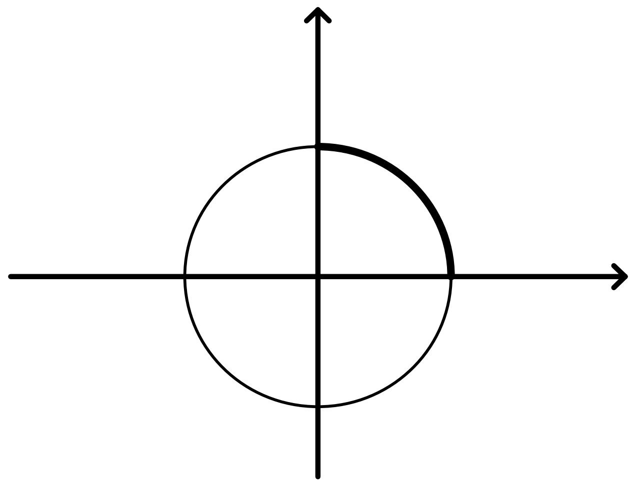

Рис.3. К примеру 1.

**ПРИМЕР 2.** На кривой Г, заданной параметрически уравнениями

$$x=a\cos\pi t,\quad y=a\sin\pi t,\quad z=bt,\quad 0<t<4,$$

распределена масса с плотностью $\rho(x, y, z)=z^2$. Определить массу кривой.

Кривая Г представляет собой два витка спирали (рис 4). Для определения ее массы воспользуемся процедурой, аналогичной применявшейся при введении понятия криволинейного интеграла.

Проведем разбиение $T$ кривой Г точками $A=N_o, N_1, N_2, \ldots, N_n=B$ на элементарные дуги $\cup N_k N_{k+1}$. На каждой дуге выберем по точке $M_k$ и будем считать, что плотность кривой на этой дуге постоянна и равна значению $\rho(M_k)$ плотности в точке $M_k$. Тогда масса элементарной дуги равна произведению плотности на длину дуги: $\Delta m_k=\rho(M_k)\cdot\Delta s_k$. Масса всей кривой равна сумме масс всех элементарных дуг: $m=\sum\limits_k \Delta m_k\approx\sum\limits_k \rho\left(M_k\right)\Delta s_k$. Полученное выражение представляет собой интегральную сумму криволинейного интеграла 1-го рода $\int\limits_{\Gamma}\rho\left(M\right)ds$ функции $\rho(M)$ по дуге Г.

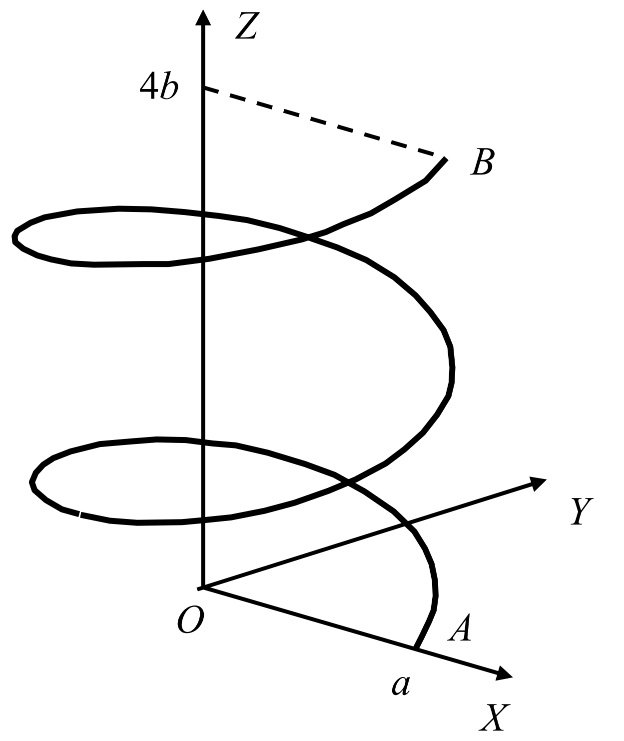


Рис.4. К примеру 2.

С уменьшением длин дуг $\cup N_k N_{k+1}$ разбиения исходной кривой интегральная сумма приближается к искомой массе. В пределе получаем:

$$m = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_k \Delta m_k = \int_\Gamma \rho(M) ds =$$

$$= \int_0^4 (bt)^2 \cdot \sqrt{(a\pi)^2 \cdot \sin^2 t + (a\pi)^2 \cdot \cos^2 t + b^2}\, dt =$$

$$= b^2 \cdot \int_0^4 t^2 \cdot \sqrt{a^2\pi^2 + b^2}\, dt = b^2 \cdot \sqrt{a^2\pi^2 + b^2} \cdot \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^4 = \frac{64}{3} b^2 \cdot \sqrt{a^2\pi^2 + b^2}. \blacksquare$$

**Замечание.** В случае кривой на плоскости:

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j}, \quad a \le t \le b, \tag{5}$$

сохраняются определения и остаются справедливыми все теоремы, сформулированные выше. В соответствующих формулах нужно лишь убрать третью координату $z(t)$ (или $\zeta_k$).

**ПРИМЕР 3.** Вычислить интеграл $I = \int\limits_{\Gamma} xyds$, где $\Gamma$ – четверть эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, лежащая в первом квадранте (рис. 5).

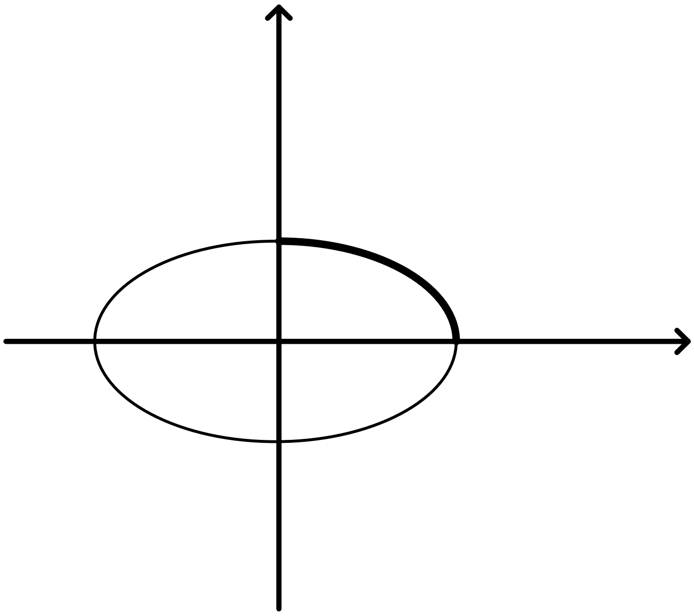

Рис.5. К примеру 3.

Пусть для определенности $a > b$. Введем параметризацию дуги: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 < t < \pi/2$. Тогда, используя теорему 2, получаем

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} a\cos t \cdot b\sin t \cdot \sqrt{(a\sin t)^2 + (b\cos t)^2}\, dt =$$

$$= \frac{ab}{2} \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \sin 2t \cdot \sqrt{a^2 \cdot \frac{1-\cos 2t}{2} + b^2 \cdot \frac{1+\cos 2t}{2}}\, dt =$$

$$= -\frac{ab}{4} \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2-b^2}{2} \cdot \cos 2t}\; d\cos 2t =$$

$$= \frac{ab}{3(a^2-b^2)} \cdot \left( \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2-b^2}{2} \cdot \cos 2t \right)^{3/2} \Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{ab}{3} \cdot \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} = \frac{ab}{3} \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}. \blacksquare$$

## 6.2. Криволинейный интеграл II-го рода.

В этом разделе мы познакомимся с еще одним типом криволинейных интегралов. Начнем с определения ориентированной кривой в пространстве.

**Определение 1.** Кривую Г, определяемую уравнением

$$\vec{r}\left(t\right) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k}, \quad a \le t \le b,$$

будем называть ***ориентированной кривой***, если на ней задан порядок следования точек, а именно, точка $M_2$ следует за точкой $M_1$, если радиус-вектор $\overrightarrow{OM_2} = \vec{r}(t_2)$ точки $M_2$ отвечает значению параметра $t = t_2$ большему, чем значение параметра $t = t_1$ радиус-вектора $\overrightarrow{OM_1} = \vec{r}(t_1)$ точки $M_1$, т.е. $t_2 > t_1$.

Точка $A$ с радиус-вектором $\overrightarrow{OA} = \vec{r}(a)$ называется началом кривой, а точка $B$ с радиус- вектором $\overrightarrow{OB} = \vec{r}(b)$ – концом кривой (см. рис.1).

**ПРИМЕР 1.** Для окружности $x^2 + y^2 = R^2$ на плоскости $OXY$ (рис. 6) радиус-векторы точек в параметрическом виде можно определить выражением:

$$\vec{r}(t) = R\cdot\cos t\cdot\vec{i} + R\cdot\sin t\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi .$$

Эта кривая – ориентированная: при возрастании параметра $t$ от значения $t = 0$, отвечающего точке $A$ происходит движение соответствующей точки кривой против часовой стрелки до точки $B$ (для которой $t = 2\pi$). ▪

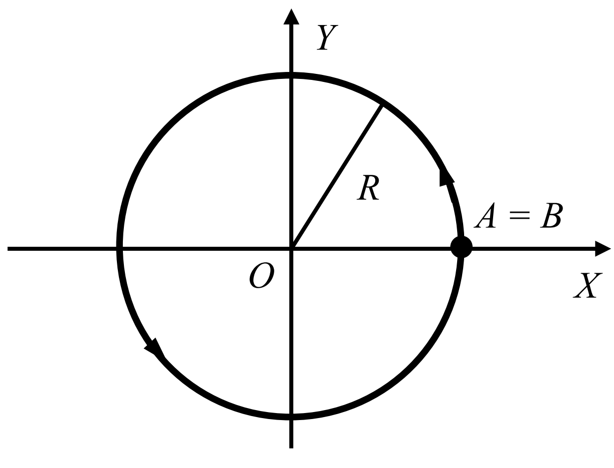


Рис.6. К примеру 1.

При построении разбиения $T$ в этом параграфе будем предполагать, что точки разбиения $A = N_o,\ N_1,\ N_2,\ \ldots,\ N_n = B$ следуют друг за другом. Обозначим через $(\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k)$ координаты вектора $\overrightarrow{N_k N_{k+1}}$.

Пусть на кривой определены три непрерывные функции: $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$. Тогда можно считать, что на кривой $\Gamma$ задана вектор-функция

$$\vec{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\big).$$

Составим три интегральные суммы:

$$\begin{aligned}
&а) \quad \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\cdot\Delta x_k,\\
&б) \quad \sum_{k=0}^{n-1} Q(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\cdot\Delta y_k,\\
&в) \quad \sum_{k=0}^{n-1} R(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\cdot\Delta z_k.
\end{aligned} \tag{1}$$

Теперь можно дать определение криволинейного интеграла II-го рода.

**Определение 2.** Пусть существуют пределы интегральных сумм (1) при бесконечном увеличении числа точек деления и бесконечном уменьшении длин векторов $\overrightarrow{N_k N_{k+1}}$, причем эти пределы не зависят ни от способа разбиения кривой $\Gamma$, ни от выбора точек на дугах:

$$\begin{aligned}
&а) \quad \int\limits_{\Gamma} P(M)dx = \int\limits_{\Gamma} P(x,y,z)dx = \lim_{\max\limits_k \Delta x_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\cdot\Delta x_k,\\
&б) \quad \int\limits_{\Gamma} Q(M)dy = \int\limits_{\Gamma} Q(x,y,z)dy = \lim_{\max\limits_k \Delta y_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} Q(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\cdot\Delta y_k,\\
&в) \quad \int\limits_{\Gamma} R(M)dz = \int\limits_{\Gamma} R(x,y,z)dz = \lim_{\max\limits_k \Delta z_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} R(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\cdot\Delta z_k.
\end{aligned} \tag{2}$$

Тогда ***криволинейным интегралом II-го рода***, или криволинейным интегралом от векторной функции $\vec{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big)$ вдоль ориентированной кривой Г, называется сумма интегралов, определенных формулой (2):

$$\int\limits_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{\Gamma} P\left(x,y,z\right)dx + Q\left(x,y,z\right)dy + R\left(x,y,z\right)dz\,. \qquad (3)$$

(В левой части равенства (3) под интегралом стоит скалярное произведение вектора $\vec{F}\left(x,y,z\right)=\left(P\left(x,y,z\right),\,Q\left(x,y,z\right),\,R\left(x,y,z\right)\right)$ на вектор $d\vec{r}=\left(dx,dy,dz\right)$).

**Определение 3.** Если кривая Г замкнута, то криволинейный интеграл, определяемый формулой (3), называется ***циркуляцией*** вектора $\vec{F}\left(x,y,z\right)$ по контуру Г. Для циркуляции обычно используется обозначение

$$\oint\limits_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r}\,.$$

Как и в случае криволинейных интегралов I-го рода, верна теорема:

**Теорема 1.** Если Г – кусочно-гладкая кривая и вектор $\vec{F}(x,y,z)$ имеет непрерывные на Г компоненты $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$, то криволинейные интегралы (2) и (3) существуют и определены однозначно**.**

Используя формулу для дифференцирования сложной функции (см. Выпуск 2 настоящего пособия), получаем еще одно утверждение:

**Теорема 2.** Если кривая Г задается векторным уравнением (1) п. 6.1, то интеграл (3) вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} =$$

$$= \int\limits_{a}^{b}\Big[P\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot x'(t) + Q\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot y'(t) + \qquad (4)$$

$$+ R\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot z'(t)\Big]dt.$$

Аналогичные формулы справедливы для каждого из интегралов (2).

**Замечание.** Криволинейный интеграл II-го рода, в отличие от криволинейного интеграла I-го рода, *зависит от ориентации кривой*. При изменении ориентации (заданного направления движения по кривой) интегралы (2) – (4) *меняют знак*. Это связано с тем, что в определении криволинейного интеграла II-го рода в интегральных суммах (1) значения координат $\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$ меняют знак при изменении направления векторов $\overrightarrow{N_k N_{k+1}}$ на противоположное. В криволинейном интеграле I-го рода изменения знака не происходит, поскольку в соответствующей интегральной сумме (2) из п.6.1 величины $\Delta s_k$ – длины дуг разбиения, которые не изменяются при изменении направления обхода кривой.

**ПРИМЕР 2 .** Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = y \cdot \vec{i} - 3x\vec{j} + x\vec{k}$ вдоль контура $\Gamma = \{(x,y,z)\colon x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = 1 - 2\cos t - 2\sin t\}$ в направлении возрастания параметра $t$ (рис 7).

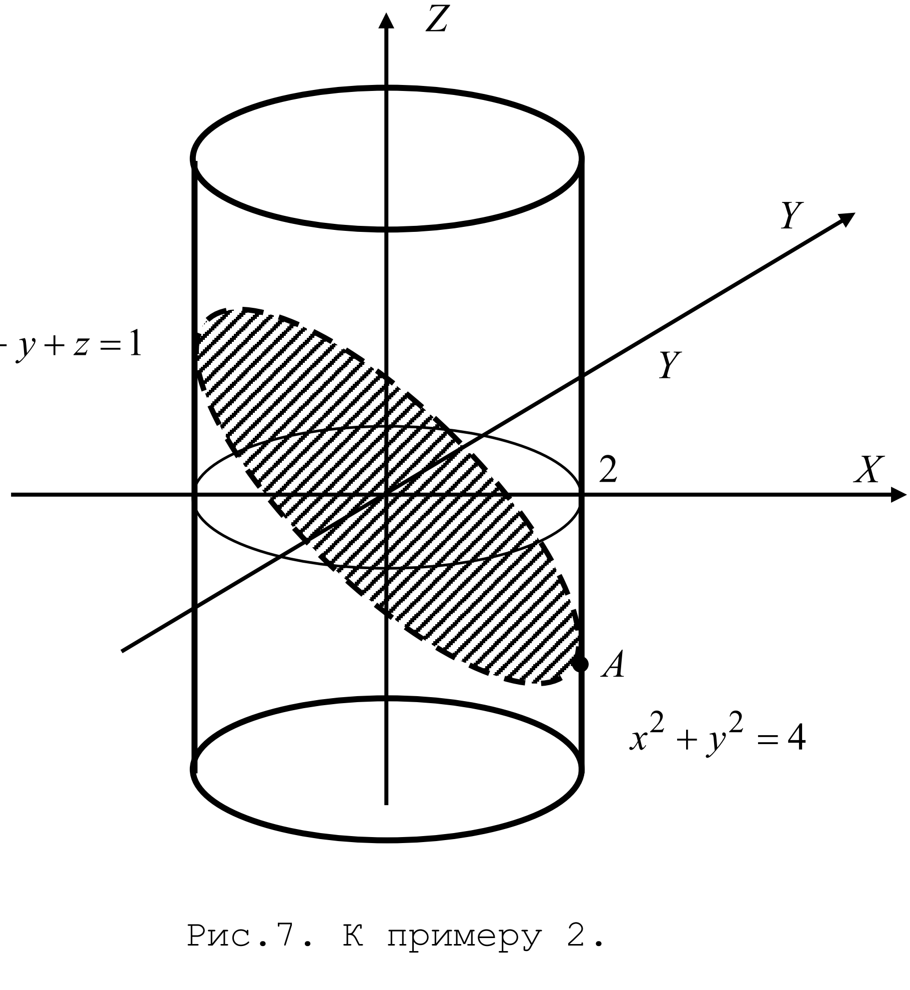


Рис.7. К примеру 2.

Заметим сначала, что для точек, лежащих на контуре Γ справедливы соотношения: $x + y + z = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$, т.е. кривая Γ есть замкнутая линия пересечения цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ с плоскостью $x + y + z = 1$. Если начать движение по кривой Γ от точки $A(2, 0, -1)$ в которой значение параметра $t$ равно 0, то при изменении параметра $t$ до значения 2π, точка кривой вернется в исходную точку $A$.

Используя теорему 2, можно записать:

$$\oint_{\Gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left[ y(t) \cdot x'(t) - 3x(t) \cdot y'(t) + x(t) \cdot z'(t) \right] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ 2\sin t \cdot (-2\sin t) - 6\cos t \cdot 2\cos t + 2\cos t \cdot (2\sin t - 2\cos t) \right] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( -4\sin^2 t - 16\cos^2 t + 4\sin t \cos t \right) dt = \int_0^{2\pi} \left( -4 - 12 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} + 4\sin t \cos t \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( -10 - 6\cos 2t + 4\sin t \cos t \right) dt = -10t \Big|_0^{2\pi} - 3\sin 2t \Big|_0^{2\pi} - 2\sin^2 t \Big|_0^{2\pi} = -20\pi. \blacksquare$$

**ПРИМЕР 3.** Найти модуль циркуляции вектора $\vec{a} = yz \cdot \vec{i} - xz \cdot \vec{j} + xy \cdot \vec{k}$ вдоль контура $\Gamma = \{(x, y, z)\colon\ x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ x^2 + y^2 = 9,\ z \geq 0\}$, (рис.8).

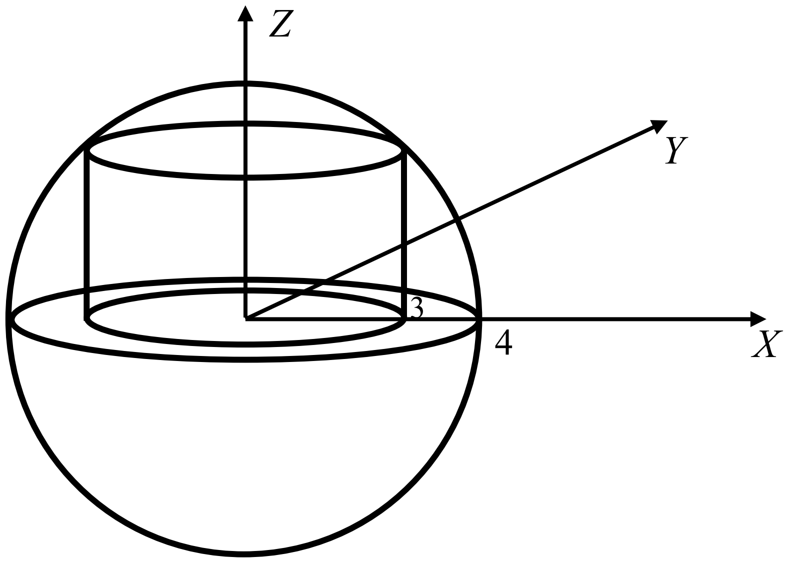


Рис.8. К примеру 3.

Для точек $(x, y, z)$, лежащих на контуре Γ, можно записать: $z^2 = 16 - (x^2 + y^2) = 16 - 9 = 7$, откуда, учитывая условие $z \ge 0$, получаем $z = \sqrt{7}$. Поскольку для точек кривой Γ выполнено соотношение $x^2+y^2=9$, на ней можно ввести параметризацию: $x = 3\cos t, \quad y = 3\sin t, \quad z = \sqrt{7}, \quad 0 \le t \le 2\pi$.

Поскольку в примере требуется найти модуль циркуляции, то направление обхода кривой не имеет значения (при его изменении на противоположный меняется знак всего криволинейного интеграла II-го рода, а значит и циркуляции). Примем, что движение по кривой происходит в сторону увеличения параметра $t$. Применяя теорему 2, получим:

$$\oint_\Gamma \vec{a} \cdot d\vec{r} = \oint_\Gamma yzdx - xzdy + xydz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(3\sin t \cdot \sqrt{7} \cdot (-3\sin t) - 3\cos t \cdot \sqrt{7} \cdot (3\cos t) + 3\cos t \cdot (3\sin t) \cdot 0\right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -9\sqrt{7} \cdot \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) \cdot dt = -9\sqrt{7} \cdot 2\pi,$$

откуда модуль циркуляции равен $18\pi \cdot \sqrt{7}$. ▪

**Замечание.** Все определения и утверждения, сформулированные выше для пространственных кривых, справедливы и в случае плоских кривых. В соответствующих формулах нужно лишь убрать третью координату $z(t)$.

## 6.3. Свойства криволинейных интегралов I и II рода.

Основные свойства криволинейных интегралов во многом схожи со свойствами определенных интегралов Римана, изученных в главе 2 настоящего пособия.

**Теорема.** Криволинейные интегралы I-го и II-го рода обладают следующими свойствами:

**❶. Линейность.**

$$\int_{\Gamma}\left(c_1 f_1(M)+c_2 f_2(M)\right)ds=c_1\cdot\int_{\Gamma} f_1(M)\,ds+c_2\cdot\int_{\Gamma} f_2(M)\,ds,$$

$$\int_{\Gamma}\left(c_1\vec{F}_1(M)+c_2\vec{F}_2(M)\right)\cdot d\vec{r}=c_1\cdot\int_{\Gamma}\vec{F}_1(M)\cdot d\vec{r}+c_2\cdot\int_{\Gamma}\vec{F}_2(M)\cdot d\vec{r},$$

где $c_1$ и $c_2$ – постоянные.

**❷. Аддитивность.** Если кривая $\Gamma$ составлена из нескольких кривых, т.е. $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\ldots\Gamma_\ell$, то

$$\int_{\Gamma} f(M)\,ds=\sum_{k=1}^{\ell}\int_{\Gamma_k} f(M)\,ds$$

и

$$\int_{\Gamma}\vec{F}(M)\cdot d\vec{r}=\sum_{k=1}^{\ell}\int_{\Gamma_k}\vec{F}(M)\cdot d\vec{r}.$$

**ПРИМЕР 1.** Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int_{\Gamma} x^2dx+xydy$ по плоской кривой $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, где $\Gamma_1$ есть отрезок, соединяющий точки $O(0,0)$ и $C(1,1)$ (с направлением от точки $O$ к точке $C$), а $\Gamma_2$ – часть параболы $x^2=y$ от точки $C$ до точки $O$ (рис.9).

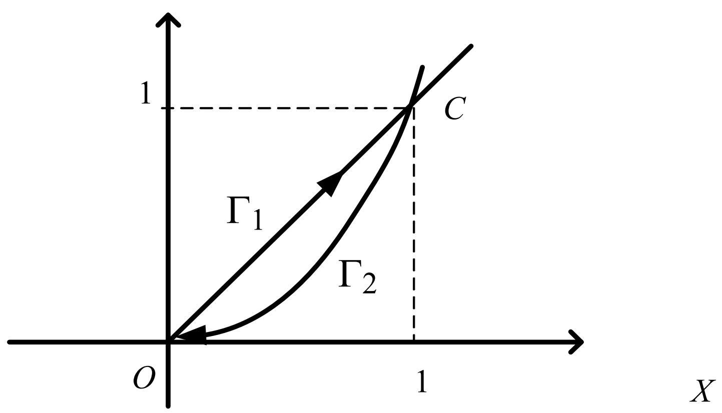


Рис.9. К примеру 1.

Введем следующую параметризацию на кривой $\Gamma$. На отрезке $\Gamma_1$: $x = t$, $y = t$, $0 \le t \le 1$, а на кривой $\Gamma_2$: $y = t^2$, $x = t$, $1 \ge t \ge 0$.

Воспользовавшись теоремой 2 пункта 6.2 и теоремой пункта 6.3, запишем:

$$\int_{\Gamma} x^2dx + xydy = \int_{\Gamma_1} x^2dx + xydy + \int_{\Gamma_2} x^2dx + xydy = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int_{\Gamma_1} x^2dx + xydy = \int_0^1 t^2dt + t^2dt = 2\cdot\frac{t^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3},$$

$$I_2 = \int_{\Gamma_2} x^2dx + xydy = \int_1^0 t^2dt + t^3\cdot 2tdt = \left(\frac{t^3}{3} + 2\cdot\frac{t^5}{5}\right)\bigg|_1^0 = -\frac{11}{15}.$$

Тогда

$$\int_{\Gamma} x^2dx + xydy = \frac{2}{3} - \frac{11}{15} = -\frac{1}{15}. \blacksquare$$

**ПРИМЕР 2.** Найти работу силы $\vec{F} = (x - y)\cdot\vec{i} + \vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\Gamma = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 = 4,\ y \ge 0\right\}$ от точки $A(2, 0)$ до точки $B(-2, 0)$ (рис. 10).

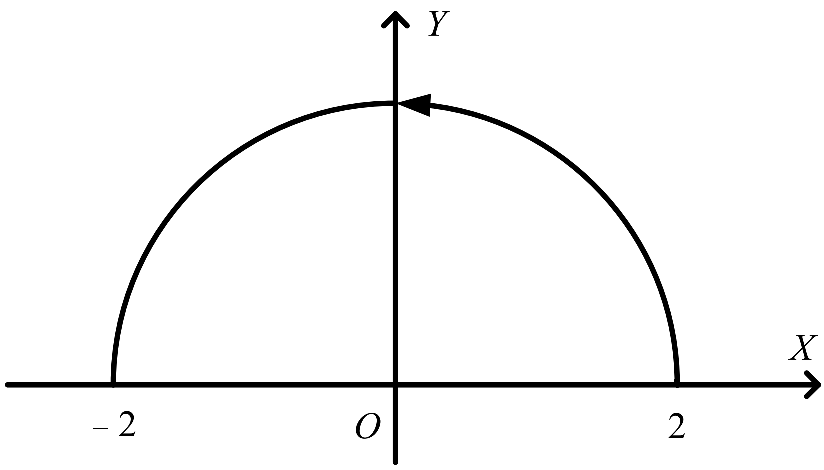


Рис. 10. К примеру 2.

Пусть на материальную точку $M(x,y)$ плоскости $OXY$ действует сила $\vec{F}$, зависящая только от положения точки $M$. При этих условиях на плоскости определено силовое поле, а сила $\vec{F}$, действующая на материальную точку, называется ***напряженностью*** поля. Пусть материальная точка под действием силы $\vec{F}(M) = P(M)\cdot\vec{i} + Q(M)\cdot\vec{j}$ движется в силовом поле по кривой $\Gamma$ от точки $A$ до точки $B$. Найдем работу, совершаемую силовым полем.

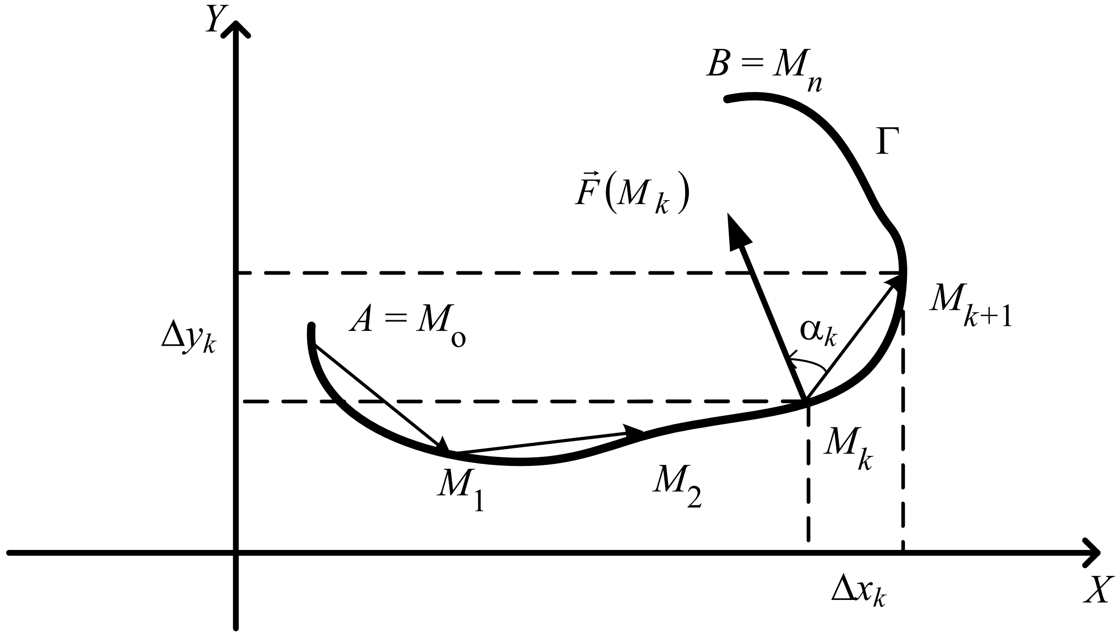


Рис.11. К примеру 2.

Проведем разбиение $T$ кривой $\Gamma$ точками $A = M_o, M_1, M_2, \ldots, M_n = B$ на элементарные дуги. На дуге $\cup M_k M_{k+1}$ сила мало меняется, и она может считаться постоянной и равной своему значению в начальной точке дуги: $\vec{F}(M) \approx \vec{F}(M_k)$. Обозначим через $\alpha_k$ угол между направлением силы $\vec{F}$ в точке $M_k$ и секущей $\overrightarrow{M_k M_{k+1}}$ (рис 11). Тогда работа $A_k$ по перемещению материальной точки по кривой $\Gamma$ от точки $M_k$ до точки $M_{k+1}$ будет определяться по формуле: $A_k = \vec{F}(M_k)\cdot\overrightarrow{M_k M_{k+1}} = P(M_k)\cdot\Delta x_k + Q(M_k)\cdot\Delta y_k$. Работа по перемещению материальной точки вдоль всей кривой от $A$ до $B$ будет равна суммарной работе, совершаемой на всех элементарных дугах: $A=\sum\limits_{k=0}^{n-1}A_k$ . Переходя к пределу, получаем

$$A=\lim_{\substack{\max\limits_k \Delta x_k\to 0\\ \max\limits_k \Delta y_k\to 0}}\sum_{k=0}^{n-1}A_k=\int\limits_{\Gamma}P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

т.е. работа равна криволинейному интегралу II-го рода от силы $\vec{F}$ по дуге Г.

Для рассматриваемого примера работа выражается интегралом

$$A=\int\limits_{\Gamma}(x-y)dx+dy.$$

Проведем параметризацию кривой Г: $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $0\le t\le \pi$. Тогда, используя теорему 2 пункта 6.2, получаем

$$A=\int\limits_0^{\pi}\left[(2\cos t-2\sin t)\cdot(-2\sin t)+2\cos t\right]dt=$$

$$=2\int\limits_0^{\pi}\left(-2\sin t\cdot\cos t+2\sin^2 t+\cos t\right)dt=$$

$$=2\int\limits_0^{\pi}\left(-\sin 2t+1-\cos 2t+\cos t\right)dt=\left(\cos 2t+2t-\sin 2t+2\sin t\right)\Big|_0^{\pi}=2\pi.\ ■$$

## 6.4. Связь криволинейных интегралов I и II рода.

Пусть на плоской кривой Г даны две произвольные точки $M_1$ и $M_2$ (рис.12). Обозначим через $\Delta s$ длину кривой между точками $M_1$ и $M_2$, через $\Delta x$ – абсциссу вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, а через $\Delta y$ – его ординату.

Из криволинейного треугольника $M_1M_2D$ (рис.12) по теореме Пифагора получаем: $\Delta s^2\approx\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|^2=\Delta x^2+\Delta y^2$. Пусть φ – угол между вектором $\overrightarrow{M_1M_2}$ и осью абсцисс, а α – угол между касательной к кривой Г в точке $M_1$ (предельным направлением вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ при $\Delta s\to 0$) и положительным направлением оси. Тогда при $\Delta s \to 0$ имеем $\varphi \to \alpha$. Кроме того, при малом значении $\Delta s$ можно считать, что $\Delta s \approx ds$, $\Delta x \approx dx$, $\Delta y \approx dy$. Поскольку $\Delta x \approx \Delta s \cdot \cos\varphi$, $\Delta y \approx \Delta s \cdot \sin\varphi$, то при $\Delta s \to 0$ получаем:

$$dx = ds \cdot \cos\alpha, \quad dy = ds \cdot \sin\alpha .$$

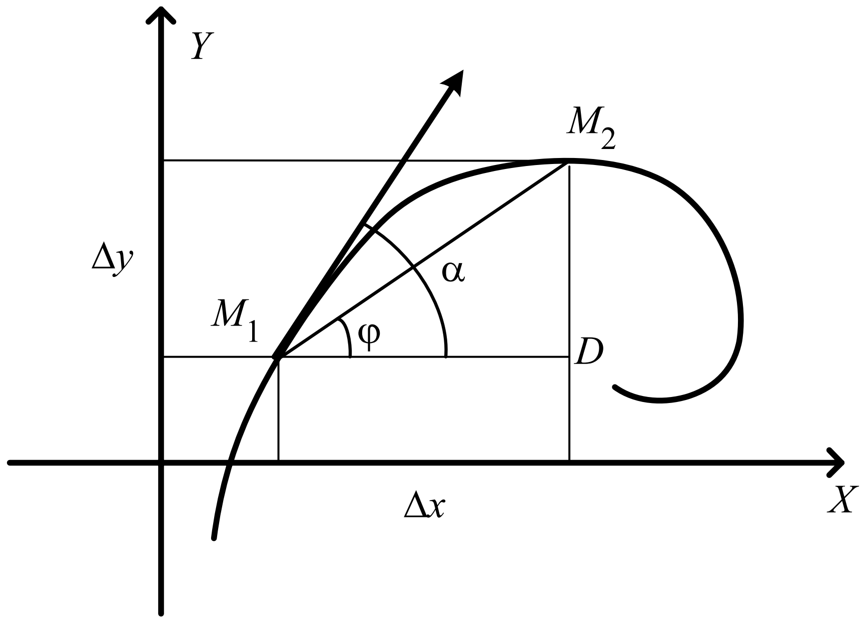


Рис.12. К выводу формулы связи криволинейных интегралов I и II рода.

В случае пространственной кривой касательная в точке $M_1$ (предельное положение луча, направленного по вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$) образует с координатными осями $OX$, $OY$ и $OZ$ углы α, β и γ, соответственно, а вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ образует с теми же осями углы φ, ψ и θ (рис. 13). При этом

$$\Delta x \approx \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| \cdot \cos\varphi, \ \Delta y \approx \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| \cdot \cos\psi, \ \Delta z \approx \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| \cdot \cos\theta ,$$

а $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| \approx \Delta s$. Тогда в пределе при $\Delta s \to 0$ получаем:

$$dx = ds \cdot \cos\alpha, \ dy = ds \cdot \cos\beta, \ dz = ds \cdot \cos\gamma .$$

Подставив эти соотношения в интегральные суммы для криволинейных интегралов I-го и II-го рода, приходим при $\max\limits_k \Delta s_k \to 0$, (а значит, и $\max\limits_k \Delta x_k \to 0$, $\max\limits_k \Delta y_k \to 0$, $\max\limits_k \Delta z_k \to 0$) к равенству соответствующих интегралов:

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$
$$= \int\limits_{\Gamma} \big( P(x,y,z)\cdot\cos\alpha + Q(x,y,z)\cdot\cos\beta + R(x,y,z)\cdot\cos\gamma \big)\,ds, \qquad (1)$$

где $\alpha, \beta, \gamma$ – функции точки $M$.

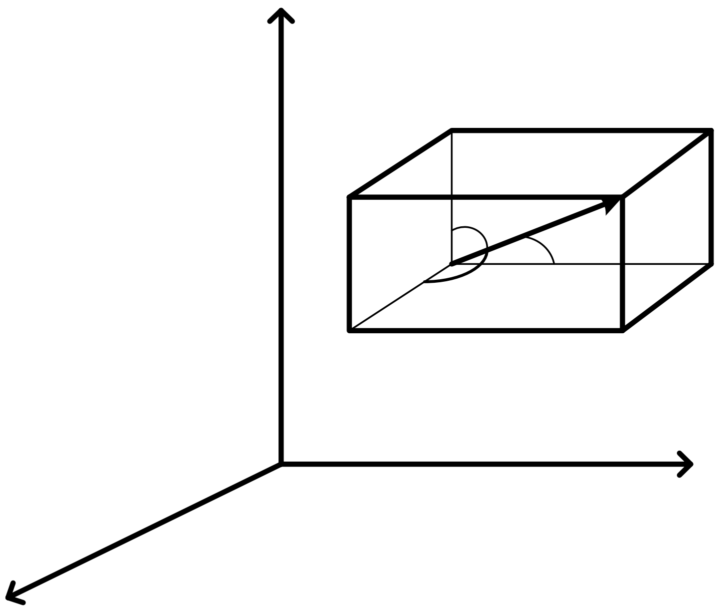

Рис.13. К выводу формулы связи криволинейных интегралов I и II рода.

**Замечание.** В двумерном случае (см. рис. 12) связь криволинейных интегралов I-го и II-го рода определяется формулой, аналогичной (1):

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{\Gamma} \big( P(x,y)\cdot\cos\alpha + Q(x,y)\cdot\sin\alpha \big)\,ds.$$

$\Delta z$

## 6.5. Формула Грина.

Формула Грина устанавливает связь между двойным интегралом по плоской области и криволинейным интегралом II-го рода по его границе.

Изобразим на плоскости две декартовы системы координат (рис. 14). Принципиальное различие этих систем состоит в том, что путем перемещения в плоскости, невозможно добиться совмещения систем координат *a*) и *b*) так,



$X$

чтобы совпали положительные направления осей. Систему координат $a$) называют ***правой***, а систему координат $b$) – ***левой***.

Рассмотрим некоторую область на плоскости с заданной системой координат. Для системы координат ($a$) на рис. 14 ***положительным направлением обхода границы*** области будем считать направление, при движении по которому область остается слева. Для системы координат ($b$) при положительном направлением обхода границы область должна оставаться справа. (На рис.14 изображены положительные направления обхода границ указанных областей.)

***Отрицательным направлением*** обхода границы области считается противоположное направление.

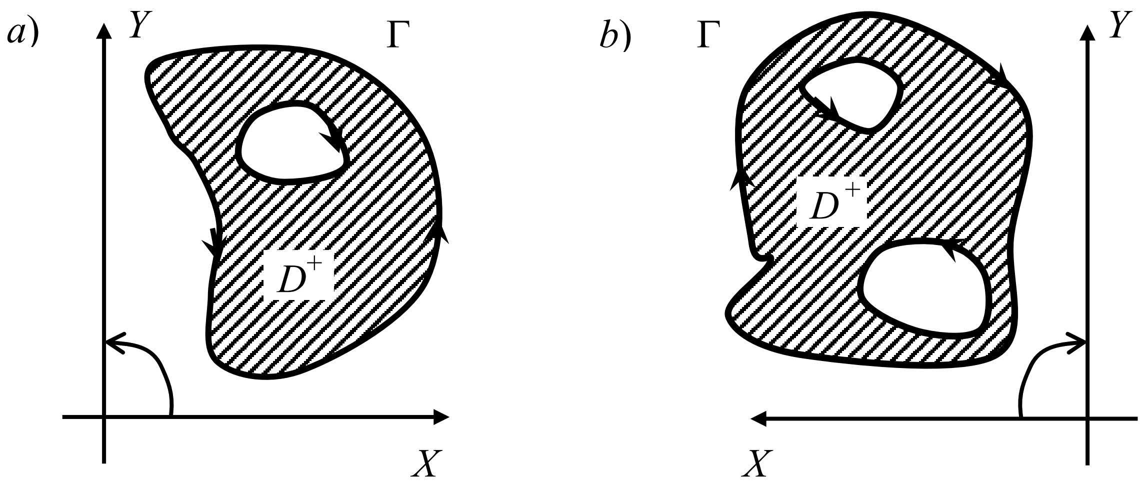


Рис.14. Положительное направление обхода для правой ($a$) и левой ($b$) систем координат.

Область считается ориентированной положительно (и обозначается $D^+$), если на ее границе задано положительное направление обхода, и ориентированной отрицательно (обозначается $D^-$), если на ее границе задано отрицательное направление обхода.

По определению, будем считать, что двойной интеграл по области $D^+$ совпадает с введенным ранее двойным интегралом по неориентированной области, а двойной интеграл по области $D^-$ отличается от него знаком:

$$\iint\limits_{D^+} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = -\iint\limits_{D^-} f(x,y)\,dxdy\,.$$

Пусть область $D$ ограничена справа и слева отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, а снизу и сверху – графиками непрерывных функций $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, т.е. является «***правильной областью I-го типа***» (см. главу 4 и рис. 15).

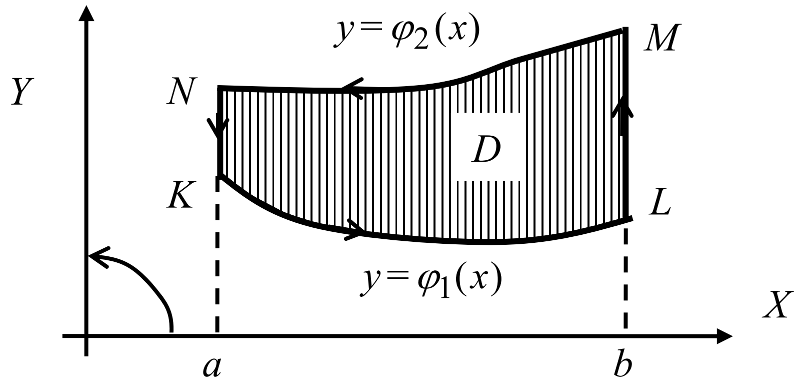


Рис.15. Правильная область первого типа.

Найдем двойной интеграл по этой области от функции $\partial P(x,y)/\partial y$:

$$\iint\limits_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy = \int\limits_a^b P(x,y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx =$$

$$= \int\limits_a^b \Big(P\big(x,\varphi_2(x)\big) - P\big(x,\varphi_1(x)\big)\Big)dx \overset{(*)}{=}$$

$$= -\int\limits_{\cup MN} P(x,y)\,dx - \int\limits_{\cup KL} P(x,y)\,dx \overset{(**)}{=}$$

$$= -\int\limits_{\cup MN} P(x,y)\,dx - \int\limits_{\cup NK} P(x,y)\,dx - \int\limits_{\cup KL} P(x,y)\,dx - \int\limits_{\cup LM} P(x,y)\,dx \overset{(***)}{=}$$

$$= -\int\limits_{\Gamma(D)} P(x,y)\,dx.$$

(Начиная с третьей строки в этом равенстве стоят криволинейные интегралы II-го рода).

Поясним преобразования, проведенные в записанном выше равенстве.

**(*).** Введем на дуге $\cup MN$ параметризацию: $x = t,\ y = \varphi_2(x),\ a \ge t \ge b$. Тогда, учитывая направление движения,

$$\int\limits_{\cup MN} P(x,y)\,dx = \int\limits_b^a P(t,\varphi_2(t))\,dt = -\int\limits_a^b P(t,\varphi_2(t))\,dt = -\int\limits_a^b P(x,\varphi_2(x))\,dx.$$

Записывая аналогичное утверждение для интеграла $\int\limits_{\cup KL} P(x,y)dx$, убеждаемся в правильности равенства (*).

**(**).** Равенство (**) может быть получено, если к интегралам $\int\limits_{\cup MN} P(x,y)\,dx$ и $\int\limits_{\cup KL} P(x,y)\,dx$ добавить нулевые слагаемые $\int\limits_{\cup NK} P(x,y)\,dx$ и $\int\limits_{\cup LM} P(x,y)\,dx$. Действительно, интеграл $\int\limits_{\cup NK} P(x,y)\,dx$ равен нулю, т.к. $x = \text{const}$ на отрезке $NK$, а значит $dx = 0$.

Аналогично равен нулю интеграл $\int\limits_{\cup LM} P(x,y)\,dx$.

**(***).** Это равенство следует из свойства аддитивности криволинейных интегралов: граница $\Gamma(D)$ области $D$ представляет собой объединение: $\Gamma(D) = (\cup MN) \bigcup (\cup NK) \bigcup (\cup KL) \bigcup (\cup LM)$.

Итак, для правильных областей I-го типа имеет место формула:

$$\iint\limits_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dxdy = -\int\limits_{\Gamma(D)} P(x,y)\,dx. \tag{1}$$

Эта формула справедлива и для областей, которые можно разбить на конечное число правильных областей I-го типа прямыми, параллельными оси $OY$.

Докажем это, например, для области $D$, изображенной, на рис.16. Разобьем область $D$ отрезками $MK$ и $NG$ на правильные области $D_1$, $D_2$, $D_3$ и $D_4$. Тогда интеграл по границе $\Gamma(D)$ области $D$ равен сумме интегралов по границам областей $D_1$, $D_2$, $D_3$ и $D_4$, т.к. отрезки $ML$, $LK$, $NF$ и $FG$, не входящие в первый интеграл, в интегралах суммы проходятся дважды: сначала в одну сторону, а потом в другую, и поэтому взаимно уничтожаются.

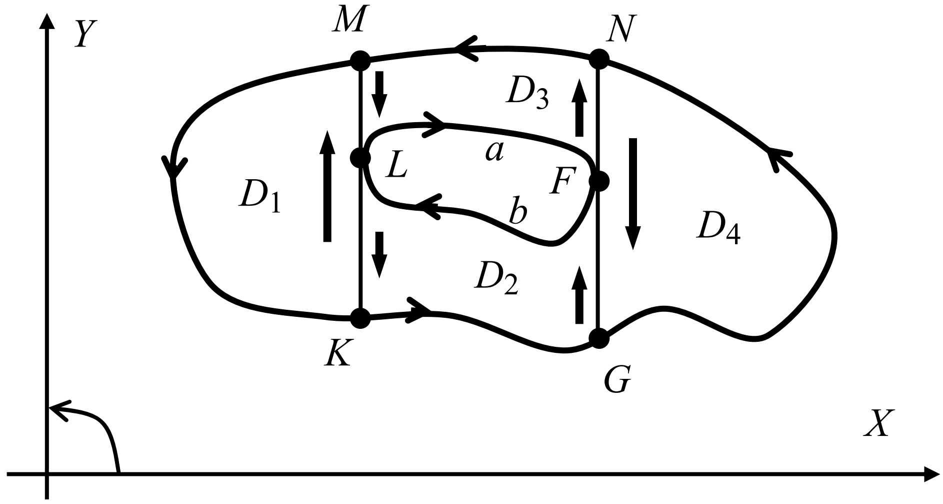


Рис.16.К доказательству формулы Грина.

Двойной интеграл по области $D$ равен сумме интегралов по областям $D_1$, $D_2$, $D_3$ и $D_4$. Поэтому получаем:

$$\iint\limits_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy = \sum_{i=1}^{4}\iint\limits_{D_i}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy = -\sum_{i=1}^{4}\int\limits_{\Gamma(D_i)} P(x,y)dx =$$

$$= \int\limits_{\cup MK}...dx + \int\limits_{\cup KL}...dx + \int\limits_{\cup LM}...dx + \int\limits_{\cup ML}...dx + \int\limits_{\cup LaF}...dx + \int\limits_{\cup FN}...dx +$$

$$+ \int\limits_{\cup NM}...dx + \int\limits_{\cup NF}..dx + \int\limits_{\cup FG}...dx + \int\limits_{\cup GN}...dx + \int\limits_{\cup GF}...dx + \int\limits_{\cup FbL}...dx +$$

$$+ \int\limits_{\cup LK}...dx + \int\limits_{\cup KG}...dx =$$

$$= \int\limits_{\cup MK} P(x,y)dx + \int\limits_{\cup KG} P(x,y)dx + \int\limits_{\cup GN} P(x,y)dx +$$

$$+ \int\limits_{\cup NM} P(x,y)dx + \int\limits_{\cup LaF} P(x,y)dx + \int\limits_{\cup FbL} P(x,y)dx = -\int\limits_{\Gamma(D)} P(x,y)dx.$$

(Для краткости в интегралах опущена подынтегральная функция $P(x,y)$).

Таким образом, формула (1) справедлива и для области на рис.16, которая сама не является правильной, но может быть разбита на конечное число правильных областей I-го типа.

Рассмотрим теперь правильную область II-го типа. Напомним, что такая область ограничена сверху и снизу отрезками прямых $y = c$ и $y = d$, а справа и слева – графиками непрерывных функций $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$ (рис. 17).

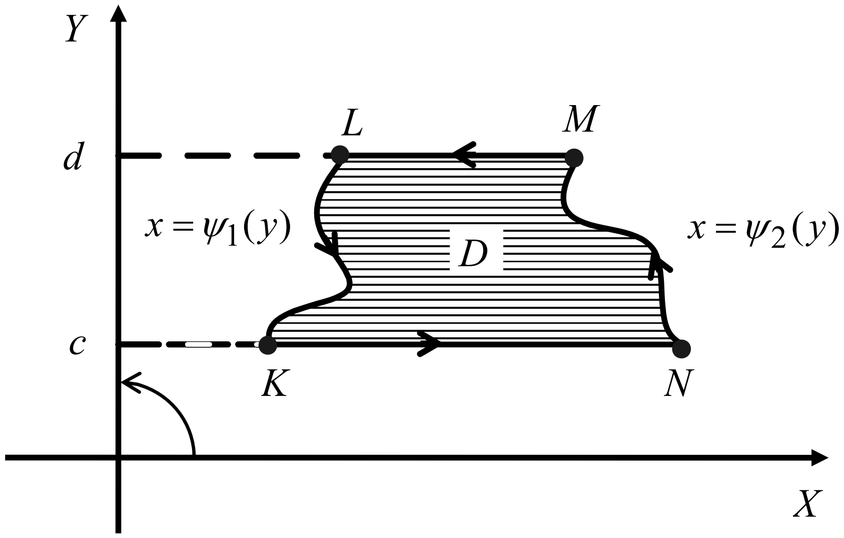


Рис.17. Правильная область второго типа.

Аналогично предыдущему, можно доказать, что для такой области, а также для областей, которые могут быть разбиты на конечное число областей II-го типа прямыми, параллельными оси $OX$, справедлива формула:

$$\iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,dx =$$

$$= \int_c^d \left(Q\left(\psi_2(y), y\right) - Q\left(\psi_1(y), y\right)\right)dy = \int_{\cup LK} Q(x,y)\,dy + \int_{\cup NM} Q(x,y)\,dy = \tag{2}$$

$$= \int_{\cup LK} Q(x,y)dy + \int_{\cup KN} Q(x,y)dy +$$

$$+ \int_{\cup NM} Q(x,y)dy + \int_{\cup ML} Q(x,y)dy = \int_{\Gamma(D)} Q(x,y)\,dy.$$

Если область можно разбить и на правильные области типа I, и на правильные области типа II, то для нее справедливы как формула (1), так и формула (2).

Сложив формулы (1) и (2), получим так называемую ***формулу Грина***:

$$\iint\limits_D \left( \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy = \int\limits_{\Gamma(D)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy. \qquad (3)$$

Итак, мы доказали следующую теорему:

**Теорема.** Если область, имеющая «хорошую» границу, может быть разбита прямыми, параллельными координатным осям, на конечное число правильных областей I-го или II-го типа, и если функции

$$P(x,y), \quad Q(x,y), \quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

непрерывны на замыкании области D, то справедлива формула Грина (3).

**ПРИМЕР 1.** Вычислить двумя способами интеграл: $\int\limits_{\Gamma} xydx - (y-x)dy$, где $\Gamma$ – контур треугольника с вершинами $A(0,0)$, $B(1,0)$ и $C(0,1)$, проходимый в положительном направлении (рис.18).

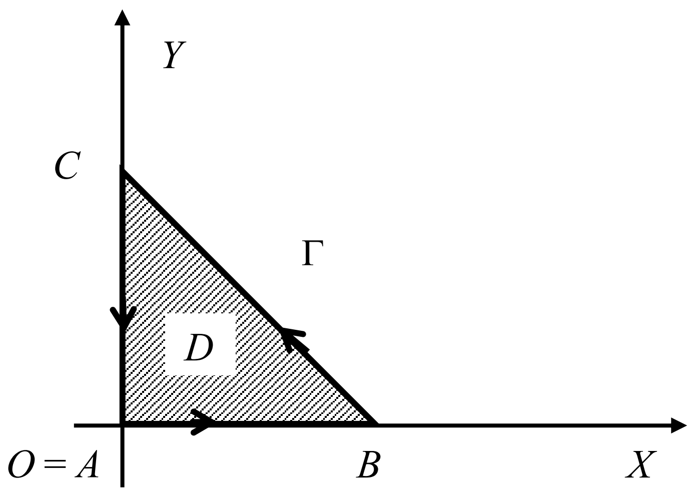


Рис.18.К примеру 1.

Контур интегрирования $\Gamma$ состоит из трех отрезков: на отрезке $AB$ переменная $y=0$, т.е. постоянна, следовательно, $dy=0$, а переменная $x$, которую мы будем считать параметром, меняется в пределах $0 \le x \le 1$; на отрезке $BC$ переменная $y = 1 - x$, следовательно, $dy = -dx$, а переменная $x$ меняется в пределах $1 \ge x \ge 0$; на отрезке $CA$ переменная $x=0$, т.е. постоянна, следовательно, $dx=0$, и в качестве параметра следует взять переменную $y$, которая меняется в пределах $1 \ge y \ge 0$.

Применяя теорему 2 пункта 6.2, запишем:

$$\int_{\Gamma} xy\,dx - (y-x)\,dy = \int_{AB} xy\;\; dx - (y-x)\,dy +$$

$$+\int_{BC} xy\,dx - (y-x)\,dy + \int_{CA} xy\;\; dx - (y-x)\,dy =$$

$$=\int_0^1 0\cdot dx + \int_1^0 x(1-x)\,dx - (1-x-x)\cdot(-dx) +$$

$$+\int_1^0 (-y)\,dy = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x - x^2\right)\Bigg|_1^0 - \frac{y^2}{2}\Bigg|_1^0 = \frac{1}{3}.$$

Вычислим теперь тот же интеграл другим способом – используя формулу Грина.

В данном интеграле $P(x,y) = xy$, $Q(x,y) = -(y-x)$, поэтому $\partial Q/\partial x = 1$, $\partial P/\partial y = x$. По формуле (3) получаем:

$$\int_{\Gamma} xy\,dx - (y-x)\,dy = \iint_D (1-x)\,dxdy =$$

$$=\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x)\,dy = \int_0^1 dx\cdot(y-xy)\Big|_0^{1-x} =$$

$$=\int_0^1 \left(1-x-x(1-x)\right)dx = \int_0^1 (x-1)^2\,dx = \frac{(x-1)^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Естественно, получен тот же результат. ▪

**ПРИМЕР 2.** Вычислить двумя способами криволинейный интеграл: $\int\limits_{\Gamma}\left(x+y\right)^2 dx+(x^2+y^2)\,dy$, если Г – контур треугольника с вершинами $A(1,1)$, $B(3,2)$ и $C(2,5)$, проходимый в положительном направлении (рис. 19).

Опять решим пример двумя способами: путем непосредственного интегрирования и на основе применения формулы Грина.

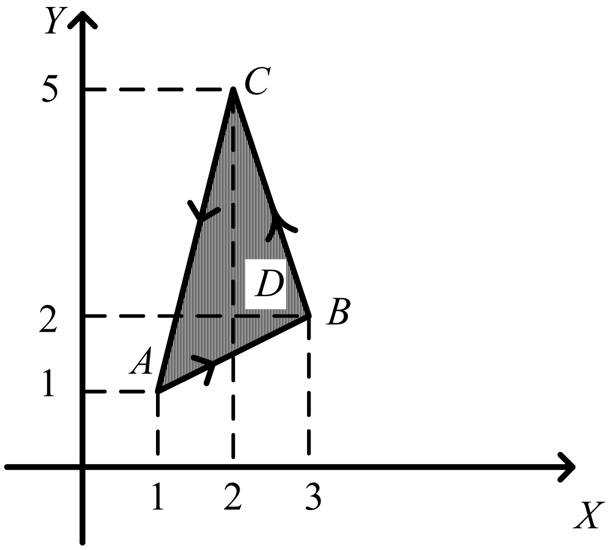


Рис.19.К примеру 2.

**Способ 1**. Введем параметризацию на отрезках $AB$, $BC$ и $CA$, составляющих кривую Г.

<u>Для отрезка $CA$</u>: $x$ – параметр, изменяется в пределах $2 \ge x \ge 1$. Переменная $y$ выражается через $x$ по формуле: $y = kx + c$, где постоянные $k$ и $c$ находятся из условий: $1 = k + c$ и $5 = 2k + c$. Решая эту систему уравнений, находим: $k = 4$, $c = -3$, следовательно, $y = 4x - 3$.

<u>Для отрезка $AB$</u>: $x$ – параметр, $y = \dfrac{x+1}{2}$, $1 \le x \le 3$.

<u>Для отрезка $BC$</u>: $x$ – параметр, $y = 11 - 3x$, $3 \ge x \ge 2$ .

Используя теорему 2 п. 6.2, получаем:

$$\int\limits_{\Gamma}(x+y)^2dx+\left(x^2+y^2\right)dy=\int\limits_{AB}(x+y)^2dx+\left(x^2+y^2\right)dy+$$

$$+\int\limits_{BC}(x+y)^2dx+\left(x^2+y^2\right)dy+\int\limits_{CA}(x+y)^2dx+\left(x^2+y^2\right)dy=$$

$$=\int_1^3\left(x+\frac{x+1}{2}\right)^2dx+\left(x^2+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right)d\left(\frac{x+1}{2}\right)+$$

$$+\int_3^2\left(x+(-3x+11)\right)^2dx+\left(x^2+(-3x+11)^2\right)d(-3x+11)+$$

$$+\int_2^1(x+4x-3)^2dx+\left(x^2+(4x-3)^2\right)d(4x-3)=$$

$$=\int_1^3\left(\left(\frac{3x+1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5x^2+2x+1}{4}\right)\right)dx+$$

$$+\int_3^2\left((11-2x)^2-3\cdot\left(10x^2-66x+121\right)\right)dx+$$

$$+\int_2^1\left((5x-3)^2+4\cdot\left(17x^2-24x+9\right)\right)dx=$$

$$=\int_1^3\left(\frac{23x^2+14x+3}{8}\right)dx+\int_3^2\left(-26x^2+154x-242\right)dx+$$

$$+\int_2^1\left(93x^2-126x+45\right)dx=\left.\left(\frac{23}{8}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{14}{8}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{8}\right)\right|_1^3+$$

$$+\left.\left(-26\cdot\frac{x^3}{3}+154\cdot\frac{x^2}{2}-242x\right)\right|_3^2+\left.\left(93\cdot\frac{x^3}{3}-126\cdot\frac{x^2}{2}+45x\right)\right|_2^1=-18\frac{2}{3}.$$

**Способ 2**. Используем формулу Грина. В данном случае $P(x,y)=(x+y)^2$, $Q(x,y)=x^2+y^2$, поэтому $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=2(x+y)$, $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=2x$. Обозначив через $D$ область, ограниченную контуром Г, по формуле (3) получаем:

$$\int\limits_{\Gamma}(x+y)^2\,dx+\left(x^2+y^2\right)dy=\iint\limits_{D}(2x-2x-2y)\,dxdy=$$

$$=-2\left(\int\limits_{1}^{2}dx\int\limits_{(x+1)/2}^{4x-3}y\,dy+\int\limits_{2}^{3}dx\int\limits_{(x+1)/2}^{11-3x}y\,dy\right)=$$

$$=-2\left(\int\limits_{1}^{2}dx\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_{(x+1)/2}^{4x-3}+\int\limits_{2}^{3}dx\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_{(x+1)/2}^{11-3x}\right)=$$

$$=-\int\limits_{1}^{2}(4x-3)^2\,dx-\int\limits_{2}^{3}(11-3x)^2\,dx+3\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2dx=-18\frac{2}{3}.\ \blacksquare$$

**ПРИМЕР 3.** Решить с помощью формулы Грина пример 1 из п. 6.3.

В этом примере $P(x,y)=x^2$, $Q(x,y)=xy$. Тогда $\partial Q/\partial x=y$, $\partial P/\partial y=0$. Подставляя эти значения в формулу (3), получаем

$$\int\limits_{\Gamma}x^2dx+xy\,dy=-\iint\limits_{D}(y-0)\,dxdy=$$

$$=-\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{x}ydy=-\int\limits_{0}^{1}dx\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_{x^2}^{x}=-\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2}\right)dx=-\frac{1}{15},$$

где $D$ – область, ограниченная кривой $\Gamma$ (см. рис. 9). ▪

**ПРИМЕР 4.** Вычислить двумя способами криволинейный интеграл: $\int\limits_{\Gamma}\left(x^2+2xy\right)dy$, если $\Gamma$ – контур, состоящий из левой половины эллипса

$\Gamma_1=\left\{(x,y):\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\quad x\le 0\right\}$ и отрезка $\Gamma_2=\{(0,y),\ -b\le y\le b\}$, причем контур проходится в положительном направлении (рис. 20).

Введем параметризацию на кривой $\Gamma_1$: $x=a\cdot\cos t$, $y=b\cdot\sin t$, $\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{3\pi}{2}$.

На контуре $\Gamma_2$ переменная $x=0$, в качестве параметра выберем переменную $y$.

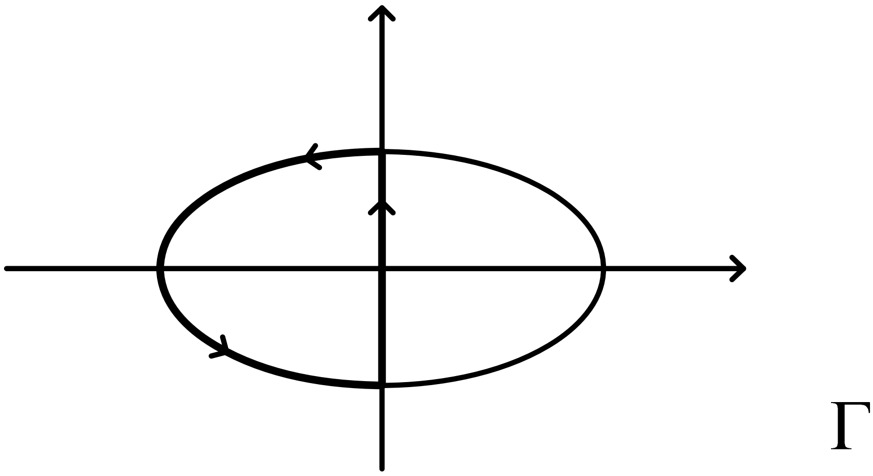


Рис.20.К примеру 4.

Используя формулу теоремы 2 пункта 6.2, получаем:

$$\int\limits_{\Gamma}\left(x^2+2xy\right)dy=\int\limits_{\Gamma_1}\left(x^2+2xy\right)dy+\int\limits_{\Gamma_2}\left(x^2+2xy\right)dy=$$

$$=\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}\left(a^2\cos^2 t+2a\cos t\cdot b\sin t\right)\cdot b\cos t\,dt+\int\limits_{-b}^{b}0\cdot dy=$$

$$=\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}a^2b\cdot\left(1-\sin^2 t\right)d\sin t-2ab\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos^2 t\cdot d\cos t=$$

$$=a^2b\left(\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{3\pi/2}-2\,ab\left(\frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{3\pi/2}=-\frac{4}{3}a^2b.$$

Вычислим теперь тот же интеграл с помощью формулы Грина (3). Здесь $P(x,y)=0$ и $Q(x,y)=x^2+2xy$, тогда $\partial Q/\partial x=2x+2y$ и $\partial P/\partial y=0$. Поэтому

$$\int\limits_{\Gamma}\left(x^2+2xy\right)dy=\iint\limits_{D}2\left(x+y\right)dxdy=\int\limits_{-b}^{b}dy\int\limits_{-a\sqrt{1-(y^2/b^2)}}^{0}2\left(x+y\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-b}^{b}dy\cdot\left(x^2+2xy\right)\Big|_{-a\sqrt{1-(y^2/b^2)}}^{0}=-a^2\int\limits_{-b}^{b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy+a\int\limits_{-b}^{b}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\cdot 2y\,dy=$$

$$=-a^2y\Big|_{-b}^{b}+\frac{a^2y^3}{3b^2}\Bigg|_{-b}^{b}+\frac{2}{3}\cdot ab^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{3/2}\Bigg|_{-b}^{b}=-\frac{4}{3}a^2b.\blacksquare$$

Сформулируем теперь два важных следствия из формулы Грина (3).

**Следствие 1.** Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ таковы, что $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$, и если $\Gamma$ – непрерывная кусочно-гладкая замкнутая кривая, ограничивающая односвязную область, то

$$\oint_{\Gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0. \qquad (4)$$

**Следствие 2**. Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ удовлетворяют условию

$$\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y \equiv 1, \qquad (5)$$

то площадь области $D$ может быть найдена по формуле:

$$|D| = \iint_D dxdy = \oint_{\Gamma(D)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy. \qquad (6)$$

В частности, условие (5) будет выполнено при $P(x,y) = -y/2$, $Q(x,y) = x/2$. Тогда из (6) получим выражение для площади области $D$ через интеграл по ее границе:

$$|D| = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma(D)} x\,dy - y\,dx. \qquad (7)$$

**ПРИМЕР 5.** Найти площадь эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Запишем уравнение эллипса в параметрической форме:

$$x = a\cdot\cos t,\ y = b\cdot\sin t,\quad 0 \le t \le 2\pi.$$

По формуле (7) получим

$$|D| = \frac{1}{2}\cdot\oint_{\Gamma(D)} xdy - ydx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(-b\sin t\cdot a\cdot(-\sin t) + a\cos t\cdot b\cos t\right)dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)dt = \frac{ab}{2}\cdot 2\pi = \pi ab. \ \blacksquare$$

**ПРИМЕР 6.** Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой: $x = a\cdot\cos^3 t,\ y = b\cdot\sin^3 t,\ 0\le t\le 2\pi$.

По формуле (7) искомая площадь равна

$$|D| = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma(D)} xdy - ydx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\Big(-b\sin^3 t\cdot a\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t) + a\cos^3 t\cdot b\cdot 3\sin^2 t\cos t\Big)dt =$$

$$= \frac{3ab}{2}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\sin^4 t\cos^2 t + \cos^4 t\sin^2 t\Big)dt =$$

$$= \frac{3ab}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t\cdot\cos^2 t\cdot\Big(\sin^2 t + \cos^2 t\Big)dt = \frac{3ab}{8}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2tdt =$$

$$= \frac{3ab}{8}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}dt = \frac{3ab}{8}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 4t}{8}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3\pi ab}{8}. \blacksquare$$

## 6.6. Условия независимости криволинейного интеграла II-го рода от пути интегрирования.

Пусть в трехмерной области $V$ заданы непрерывные функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$, а $\Gamma$ – непрерывная кусочно-гладкая кривая, лежащая в области $V$.

Рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)\,dz\,. \qquad (1)$$

Выясним, когда интеграл (1) зависит лишь от расположения начальной и конечной точек кривой $\Gamma$, но не зависит от формы кривой.

Изучим вначале дифференциальное выражение

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\,. \qquad (2)$$

Напомним, что полным дифференциалом функции $U(x,y,z)$ трех переменных называется выражение

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz. \tag{3}$$

Сформулируем без доказательства теорему, устанавливающую, в каком случае дифференциальное выражение (2) представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U$, т.е. правая часть выражения (3) совпадает с (2):

**Теорема 1 (Признак полного дифференциала).**

**1. (Случай трех переменных).** Пусть в области $V$ трехмерного пространства существуют и непрерывны производные $\partial P/\partial y$, $\partial P/\partial z$, $\partial Q/\partial x$, $\partial Q/\partial z$, $\partial R/\partial x$, $\partial R/\partial y$.

Для того чтобы выражение (2) было полным дифференциалом от некоторой функции трех переменных необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}. \tag{4}$$

**2. (Случай двух переменных).** Пусть дифференциальное выражение (2) имеет вид:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \tag{5}$$

и $V$ – область на плоскости.

Для того чтобы выражение (5) было полным дифференциалом от некоторой функции двух переменных, необходимо и достаточно, чтобы частные производные $\partial Q/\partial x$ и $\partial P/\partial y$ существовали, были непрерывными и совпадали на области $V$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{6}$$

**Замечание.** Достаточность условий (4) и (6) справедлива, вообще говоря, не для произвольных областей $V$. В плоском случае, требуется, чтобы область $V$ была односвязной (т.е. не содержала «дырок»). В трехмерном случае условия более сложные.

Теперь можно вернуться к вопросу о независимости криволинейного интеграла (1) от пути интегрирования.

Имеет место следующая теорема:

**Теорема 2.** Для того чтобы криволинейный интеграл (1) не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы дифференциальное выражение

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

представляло в рассматриваемой области полный дифференциал от некоторой функции трех переменных, т.е. имело вид

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz .$$

**Определение 1.** Функция $U$ из теоремы 2 называется ***потенциальной функцией***, или ***потенциалом*** вектора

$$\vec{F} = P(x,y,z)\cdot\vec{i} + Q(x,y,z)\cdot\vec{j} + R(x,y,z)\cdot\vec{k}$$

в области $V$.

В этом случае используется обозначение: $\boldsymbol{\vec{F} = grad\, U}$.

Отметим, что, если потенциальная функция $U$ существует, то интеграл (1) находится по формуле

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \\ = U(M)\Big|_A^B = U(B) - U(A), \tag{7}$$

где $A$ и $B$ – начальная и конечная точки кривой Г.

**Замечание.** Сформулированная теорема 2 справедлива и для случая функций двух переменных, когда $z = 0$, $R(x,y,z) = 0$.

Теорему 2 можно сформулировать в эквивалентной форме:

**Теорема 3.** Если выражение (2) является в области $V$ полным дифференциалом, то интеграл (1) по *любой замкнутой кривой* $\Gamma$, целиком лежащей в области $V$, равен нулю. Обратно, если интеграл (1) вдоль любой замкнутой кривой $\Gamma$, лежащей в области $V$, равен нулю, то выражение (2) представляет собой полный дифференциал некоторой функции трех переменных.

Докажем вначале эквивалентность утверждений теорем 2 и 3, а именно, что интеграл (1) не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, если он равен нулю для любой замкнутой кривой $\Gamma$.

Действительно, пусть интеграл (1) равен нулю вдоль любой замкнутой кривой $\Gamma$. Если $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ – две произвольные кривые, соединяющие точки $A$ и $B$, то кривая $\Gamma$, являющаяся объединением кривых $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ (кривая $\Gamma_2$ проходится в противоположном направлении) замкнута (рис.21).

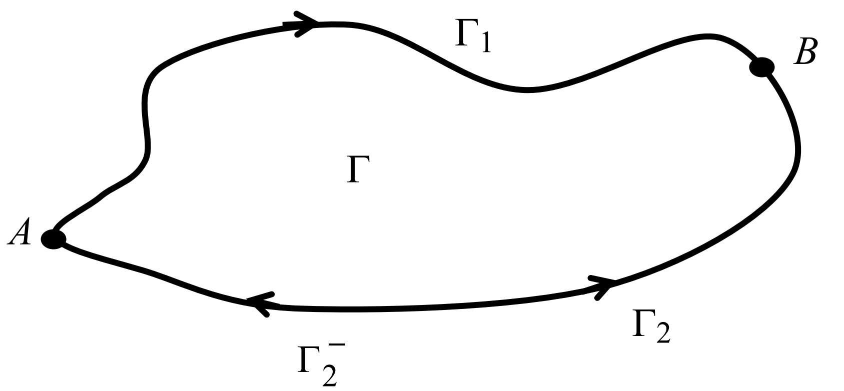


Рис.21.К доказательству теоремы 3.

По условию интеграл по любой замкнутой кривой равен нулю. Тогда

$$0 = \int_{\Gamma} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_1} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_2^-} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_1} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz -$$

$$- \int\limits_{\Gamma_2} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz.$$

Отсюда

$$\int\limits_{\Gamma_1} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$
$$= \int\limits_{\Gamma_2} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz, \tag{8}$$

т.е. интеграл (1) не зависит от пути интегрирования.

Аналогично доказывается и обратное утверждение.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 3, ограничившись случаем двух переменных.

Пусть выражение (5) есть полный дифференциал. Это означает, что справедлива формула (6). Для произвольного замкнутого контура Г, ограничивающего область $D$, по формуле Грина имеем

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_{D} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0\,,$$

что и требовалось доказать.

Обратное утверждение теоремы докажем от противного. Пусть интеграл (1) (с $R(x,y,z) = 0$ и функциями $P$ и $Q$, не зависящими от переменной $z$) по любому замкнутому контуру равен нулю. Предположим, что выражение (5), стоящее под интегралом (1), не является полным дифференциалом. По теореме 1 это означает, что хотя бы в одной точке $M$ равенство (5) не выполнено, т.е.

разность $F=\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}$ отлична от нуля. Допустим, что в точке $M$ выражение $F>0$. В силу непрерывности частных производных это неравенство будет справедливо и в некоторой окрестности $G$ точки $M$. Возьмем границу этой окрестности в качестве замкнутой кривой Г. По формуле Грина получаем

$$\int_{\Gamma} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_{D}F\,dxdy>0,$$

что противоречит сделанному предположению. Полученное противоречие завершает доказательство теорем 2 и 3.

**ПРИМЕР 1.** Вычислить интеграл $I=\int_{\Gamma}\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(xdx+ydy\right)$, где Г – кривая $y=\operatorname{arctg}\left(\sqrt[3]{x^3+8}-2\right)$ от точки $A(0,0)$ до точки $B\left(\sqrt[3]{19},\pi/4\right)$.

Преобразуем сначала подынтегральное выражение:

$$\left(x^2+y^2\right)\left(xdx+ydy\right)=\left(x^2+y^2\right)\cdot\frac{1}{2}\left(dx^2+dy^2\right)=\frac{1}{4}d\left(x^2+y^2\right)^2=$$

$$=d\left(\frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)^2\right).$$

Следовательно, функция $U=\dfrac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)^2$ является потенциалом вектор-функции $\vec{F}(x,y)=x\cdot\left(x^2+y^2\right)\cdot\vec{i}+y\cdot\left(x^2+y^2\right)\cdot\vec{j}$, и по формуле (7) интеграл равен

$$I=\int_{\Gamma}\left(\vec{F},d\vec{r}\right)=\int_{\Gamma}\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(xdx+ydy\right)=U(B)-U(A)=\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt[3]{19^2}+\frac{\pi^2}{16}\right)^2.\ \blacksquare$$

**ПРИМЕР 2.** Найти интеграл: $I=\int_{\Gamma}(4x^3y^3-3y^2+5)dx+(3x^4y^2-6xy-4)dy$,

где Г – часть графика функции $y=\arcsin x$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(1,\pi/2)$.

Функции $P(x,y,z) = 4x^3y^3 - 3y^2 + 5$ и $Q(x,y,z) = 3x^4y^2 - 6xy - 4$ имеют непрерывные производные: $\partial P/\partial y = 12x^3y^2 - 6y$ и $\partial Q/\partial x = 12x^3y^2 - 6y$, т.е. $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$. Следовательно, по теореме 2 подынтегральная функция есть полный дифференциал некоторой функции $U$. По формуле (7) интеграл $I$ в этом случае равен разности значений $U(B) - U(A)$ потенциала в точках $A$ и $B$.

Найдем потенциал $U$ двумя способами.

**Способ 1.** Зная дифференциал функции $U$: $dU = Pdx + Qdy = (4x^3y^3 - 3y^2 + 5)\,dx + (3x^4y^2 - 6xy - 4)\,dy$, первообразную $U(x,y)$ можно найти, интегрируя функцию $dU$ по любой кривой от произвольной точки $M_0$ до точки $M(x,y)$. Выберем путь состоящий из отрезков, параллельных осям $Ox$ и $Oy$. Поскольку функции $P$ и $Q$ определены при $x = y = 0$, в качестве точки $M_0$ в данном случае удобно взять начало координат (рис. 22 и 23). (Произвольность выбора точки $M_0$ объясняется тем, что по своему дифференциалу функция $U(x,y)$ может быть найдена только с точностью до произвольной постоянной).

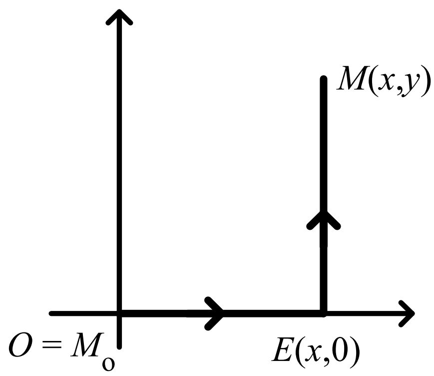


Рис.22. К примеру 2.

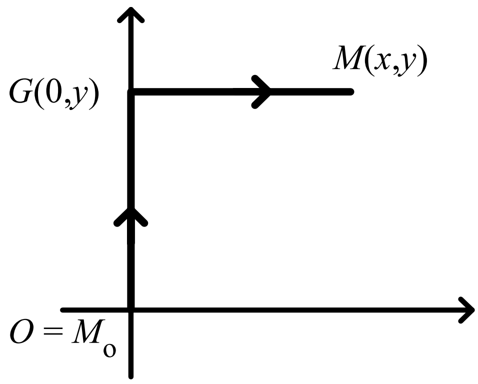


Рис. 23. К примеру 2.

Будем искать интеграл с помощью кривой, изображенной на рис.22:

$$U(x,y) = C + \int_{(0,0)}^{(x,y)} Pd\xi + Qd\eta = C + \int_{M_0E} Pd\xi + Qd\eta + \int_{EM} Pd\xi + Qd\eta .$$

В этом равенстве $C$ – произвольная постоянная, а переменные интегрирования обозначены через $\xi$ и $\eta$, чтобы не путать их с аргументами функции $U(x,y)$.

Теперь

$$U(x,y) = C + \int\limits_{M_0E} \left(4\xi^3\eta^3 - 3\eta^2 + 5\right)d\xi +$$

$$+\left(3\xi^4\eta^2 - 6\xi\eta - 4\right)d\eta + \int\limits_{EM} \left(4\xi^3\eta^3 - 3\eta^2 + 5\right)d\xi + \left(3\xi^4\eta^2 - 6\xi\eta - 4\right)d\eta =$$

$$= C + \int\limits_{M_0E} 5d\xi + \int\limits_{EM} \left(3x^4\eta^2 - 6x\eta - 4\right)d\eta =$$

$$= C + 5\xi\Big|_0^x + 3x^4 \left.\frac{\eta^3}{3}\right|_0^y - 6x\left.\frac{\eta^2}{2}\right|_0^y - 4\eta\Big|_0^y = C + 5x + x^4y^3 - 3xy^2 - 4y.$$

Таким образом, потенциал $U$ задается выражением

$$U(x,y) = x^4y^3 - 3xy^2 + 5x - 4y + C. \tag{9}$$

(Легко проверить, что частные производные найденной функции $U(x,y)$ совпадают с $P(x,y)$ и $Q(x,y)$).

**Замечание.** Тем же способом, которым была найдена функция $U(x,y)$, можно непосредственно найти интеграл $I$. Для этого вместо точек $M_0$ и $M(x,y)$ нужно было взять точки $A(0,0)$ и $B(1, \pi/2)$, (рис. 24).

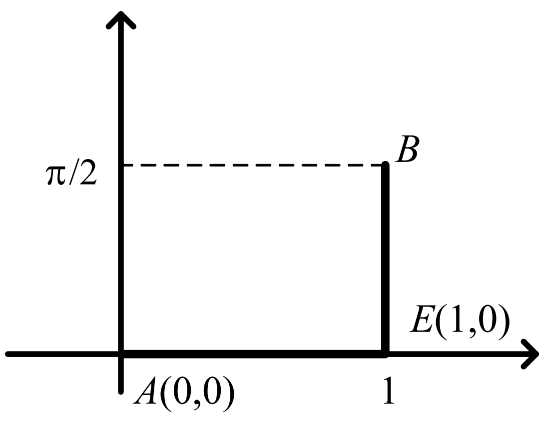


Рис.24. К примеру 2.

Тогда, повторяя с небольшими изменениями выкладки, проведенные выше, получаем:

$$
\begin{aligned}
I = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy &= \int\limits_{AE} Pdx + Qdy + \int\limits_{EB} Pdx + Qdy = \\
&= \int\limits_{AE} \left(4x^3y^3 - 3y^2 + 5\right)dx + \left(3x^4y^2 - 6xy - 4\right)dy + \\
&+ \int\limits_{EM} \left(4x^3y^3 - 3y^2 + 5\right)dx + \left(3x^4y^2 - 6xy - 4\right)dy = \\
&= \int\limits_{AE} 5dx + \int\limits_{EB} \left(3y^2 - 6y - 4\right)dy =
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

$$
= C + 5x\Big|_0^1 + 3\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - 6\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - 4y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 5 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2\pi\,.
$$

**Способ 2.** Поскольку $\partial U(x,y)/\partial x = P(x,y)$, для нахождения функции $U(x,y)$ проинтегрируем это равенство:

$$
\begin{aligned}
U(x,y) = \int P(x,y)dx = \int\left(4x^3y^3 - 3y^2 + 5\right)dx &= \\
= x^4y^3 - 3xy^2 + 5x + C(y).&
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

(При интегрировании по переменной $x$ переменная $y$ представляет собой некоторый параметр, поэтому постоянная интегрирования $C$ может зависеть от $y$).

Итак, функция $U(x,y)$ найдена с точностью до функции $C(y)$. Для нахождения $C(y)$, воспользуемся другой известной нам частной производной функции $U(x,y)$: $\partial U(x,y)/\partial y = Q(x,y)$. Подставим в эту формулу известное значение $Q(x,y) = 3x^4y^2 - 6xy - 4$ и значение функции $U(x,y)$ из формулы (11):

$$3x^4y^2 - 6xy + C'(y) \;=\; 3x^4y^2 - 6xy - 4\,.$$

Отсюда $C'(y) = -4$ и, значит, $C(y) = \int(-4)\,dy = -4y + C_0$, где $C_0$ – постоянная, не зависящая ни от каких параметров.

Полученный результат, как и следовало ожидать, совпадает с (9):

$$U(x,y) = x^4y^3 - 3xy^2 + 5x - 4y + C_0. \qquad (12)$$

**Замечание 1.** При нахождении функции $U(x,y)$ можно было сначала интегрировать выражение $\partial U(x,y)/\partial y = Q(x,y)$. Тогда функция $U(x,y)$ была бы найдена с точностью до функции $C(x)$, зависящей от переменной $x$. Чтобы найти эту функцию, нужно воспользоваться соотношением $\partial U(x,y)/\partial x = P(x,y)$.

**Замечание 2.** Для нахождения интеграла $I$ можно воспользоваться формулой (7), взяв функцию $U(x,y)$, например, из формулы (12). Тогда

$$I = U(B) - U(A) = (x^4 y^3 - 3xy^2 + 5x - 4y + C_o)\Big|_{(0,0)}^{(1,\pi/2)} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 5 - 2\pi + C_o - C_o = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 5 - 2\pi.$$

Полученный результат также совпадает с (10). ▪

## *Теоретические вопросы к главе 6.*

1. Дать определение криволинейного интеграла I-го рода. Какими свойствами обладают эти интегралы?
2. Верно ли равенство: $\int\limits_{\cup AB} xds = \int\limits_{1}^{0} x \cdot \sqrt{1+4x^2}\,dx$, где $\cup AB$ – дуга параболы $y = x^2$, пробегаемой от точки $A(1,1)$ до точки $B(0,0)$?
3. Какая кривая называется «ориентированной»?
4. Что называется криволинейным интегралом II-го рода? Каковы его свойства?
5. Что такое линейный интеграл?
6. Дать определение циркуляции.
7. Как связана работа по перемещению вдоль кривой с криволинейным интегралом по этой кривой?
8. Как связаны между собой криволинейные интегралы I-го и II-го рода?
9. Какая ориентация задается на границе области при использовании формулы Грина?
10. Когда криволинейный интеграл не зависит от формы пути интегрирования?
11. При каких условиях криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю?
12. Что такое потенциал? Каковы условия потенциальности?
13. Какие существуют способы вычисления потенциала?
14. Пусть компоненты вектор-функции $\vec{F}(x, y, z)$ – линейные функции, а Г – кусочно-гладкая замкнутая кривая, расположенная в некоторой плоскости. Доказать, что циркуляция $\oint\limits_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ либо равна нулю, либо пропорциональна площади фигуры, ограниченной кривой $\Gamma$.

# *Задачи к главе 6.*

Вычислить криволинейный интеграл I-го рода от функции $f(x,y) = 2x + y$ по дуге Γ кривой, соединяющей точки $A(0,0)$ и $B(1,1)$:

1. $y = x^2$.
2. $y = x^3$.
3. $y = \sin(\pi x/2)$.
4. $y = \sqrt{x}$.
5. Γ – первая арка циклоиды: $x = (t - \sin t)/(2\pi)$, $y = 1 - \cos t$.
6. Γ – дуга окружности с центром в точке $(1,0)$ радиуса 1.

7. Найти массу контура квадрата $|y| + |x| = 1$, если плотность в каждой его точке выражается формулой: $\mu(x,y) = xy$.

8. Вычислить криволинейный интеграл I-го рода от функции $f(x,y) = 2x + y$ по дуге Γ кривой: $2x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$.

9. Найти массу развертки окружности $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $z = 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$, если плотность в каждой ее точке выражается формулой:

$$\mu(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Найти работу силы $\vec{F}(x,y,z)$ при перемещении вдоль кривой Γ от точки $A$ до точки $B$:

10. $\vec{F}(x,y,z) = \left(2x^2 - 3y\right)\vec{i} + \left(2y^2 - 3x\right)\vec{j}$,

$$\Gamma: y = 2x + 3, \quad A(0,3), B(1,5).$$

11. $\vec{F}(x,y,z) = \left(2x^2 + 5y\right)\vec{i} + \left(2y^2 + 5x\right)\vec{j}$,

$$\Gamma: 3x + 2y^2 = 1, \quad A\left(-5,\sqrt{8}\right), B\left(-1,\sqrt{2}\right).$$

12. $\vec{F}(x,y,z) = x^3\vec{i} - y^3\vec{j}$, $\quad \Gamma: y = \sqrt{9 - x^2}$, $\quad A(0,3), B(3,0)$.

13. $\vec{F}(x,y,z)=(2x-3y)\vec{i}+(2y-3x)\vec{j}$,

$$\Gamma: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1, \quad A(-2,0), B(0,-3).$$

14. $\vec{F}(x,y,z)=\left(x^2-y^2\right)\cdot\vec{i}+\left(y^2+x^2\right)\cdot\vec{j}$,

$$\Gamma: y=\begin{cases}1-x, \ 0\le x\le 1,\\ x-1, \ 1\le x\le 2,\end{cases} \quad A(0,1), B(2,1).$$

15. $\vec{F}(x,y,z)=\left(x+y\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right)\vec{i}+\left(y-x\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right)\vec{j}$,

$$\Gamma: y=\sqrt{4-x^2}, \quad A(-2,0), B(2,0).$$

16. $\vec{F}(x,y,z)=(2xy-y)\vec{i}+\left(2y^2\right)\vec{j}, \quad \Gamma: y=x^2, \quad A(0,0), B(2,4).$

17. $\vec{F}(x,y,z)=(2x-3y)\vec{i}+(2y-3x)\vec{j}, \quad \Gamma: y=x^3, \quad A(0,0), B(2,8).$

18. $\vec{F}(x,y,z)=xy\,\vec{j}, \quad \Gamma: y=\sin x, \quad A(0,0), B(\pi,0).$

19. $\vec{F}(x,y,z)=\left(2x^2+5y^2\right)\vec{i}+\left(y^2-3x^2\right)\vec{j}$,

$$\Gamma: \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1, \quad A(0,2), B(5,0).$$

Вычислить интегралы, используя формулу Грина:

20. $\oint\limits_{\Gamma}\left(2x^2+5y^2\right)dx-\left(5x^2-2y^2\right)dy, \quad \Gamma: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1, \quad x=0,\ x\ge 0.$

21. $\oint\limits_{\Gamma}\left(2x^2-3y^2\right)dx+\left(8x^2-y^2\right)dy, \quad \Gamma: y=\frac{(x-1)^2}{2}, \quad y=0.$

22. $\oint\limits_{\Gamma}\left(2xy^2\right)dx-\left(5x^2y\right)dy, \quad \Gamma: x^2+(y-1)^2=1, \quad x=0,\ x\ge 0.$

23. $\oint\limits_{\Gamma}\left(x^2+y^2\right)dx-(5x-2y)dy$, $\Gamma$ – контур треугольника с вершинами $A(1,2)$, $B(2,3)$ и $C(5,0)$.

Найти циркуляцию $\oint\limits_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, (направление на контуре Г соответствует возрастанию параметра $t$):

24. $\vec{F}(x,y,z)=(2x-3y)\vec{i}+(2y-3x)\vec{j}+z^2\vec{k},$

$\Gamma: x=a\cos t,\ \ y=b\cos t,\ \ z=\sin t.$

25. $\vec{F}(x,y,z)=\left(2x^2-3y^3\right)\vec{i}+3\vec{j}+z\vec{k},\ \ \Gamma: x=a\cos t,\ \ y=b\sin t,\ \ z=c.$

26. $\vec{F}(x,y,z)=(2x-3y)\vec{i}+(2y+3z)\vec{j}+(z-x)\vec{k},$

$\Gamma: x=a\cos t,\ \ y=b\sin t,\ \ z=c-p\cos t.$

27. $\vec{F}(x,y,z)=\left(x^2-3y\right)\vec{i}+\left(y^2+3z\right)\vec{j}+\left(z^2-x\right)\vec{k},$

$\Gamma: x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ \ z=c\cos t.$

28. $\vec{F}(x,y,z)=\left(x-y^2\right)\vec{i}+\left(y+z^3\right)\vec{j}+\left(z-x^2\right)\vec{k},$

$\Gamma: x=a\cos t, y=b\sin t, z=c-p\cos t-q\sin t.$

Найти модуль циркуляции $\oint\limits_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r}$:

29. $\vec{F}=(2x^2+5y)\vec{i}+2x\vec{j}+3\vec{k},\quad \Gamma: \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1,\ z=1.$

30. $\vec{F}=3yz\,\vec{i}+2xz\,\vec{j}+5xy\,\vec{k},\quad \Gamma: x^2+y^2+z^2=1,\ \ x^2+z^2=4.$

31. $\vec{F}=(2x+5y)\vec{i}-y\,\vec{j}+3z\,\vec{k},\quad \Gamma: z=\dfrac{x^2+y^2}{4}+1,\ \ z=5.$

32. $\vec{F}=(x^2+5y)\vec{i}+2xz\,\vec{j}+y\,\vec{k},\quad \Gamma: x^2+y^2=9,\ 2x-y+3z=1.$

33. $\vec{F}=xz\,\vec{i}+2xy\,\vec{j}+x\,\vec{k},\quad \Gamma: x^2+y^2-z^2=0,\ z=7.$

34. $\vec{F}=2yz\,\vec{i}-3x\,\vec{j}+6z\,\vec{k},\quad \Gamma: x^2+y^2+z^2=9,\ z=5.$

35. $\vec{F}=7x\,\vec{i}+5xy\,\vec{j}-3yz^2\,\vec{k},\quad \Gamma: z=3(x^2+y^2)-1,\ z=2.$

36. $\vec{F}=(2xz-y)\vec{i}+2x\,\vec{j}+x\,\vec{k},\quad \Gamma: x^2+y^2=4,\ z=7.$

37. $\vec{F} = 2\vec{i} + x^2 y\,\vec{j} - 5x\,\vec{k}, \quad \Gamma: x = y^2 + z^2,\ x = 3.$

Найти циркуляцию $\oint\limits_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , (обход контура Γ осуществляется в сторону возрастания параметра *t*):

38. $\vec{F} = \left(4x^3y^3 + 3y^2 + 2xy^2\right)\vec{i} + (3x^4y^2 + 6xy + 2x^2y)\vec{j},$

$$\Gamma: x = \cos\left(t^2 - 1\right),\ y = \sin\left(t^2 - 1\right),\ 1 \le t \le 1 + \sqrt{2\pi}.$$

39. $\vec{F} = x^4 \cdot \vec{i} + 3xy \cdot \vec{j} + y^2 \cdot \vec{k},$

$$\Gamma: x = \frac{\cos t}{\sqrt{3}}, y = \frac{\sin t}{\sqrt{3}}, z = -\frac{\cos t}{\sqrt{3}}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

40. $\vec{F} = \sqrt[3]{\frac{y}{a}} \cdot \vec{i} + \sqrt[3]{\frac{x}{a}} \cdot \vec{j} + \sqrt[3]{a^2 \cdot x} \cdot \vec{k},$

$$\Gamma: x = a \cdot \cos^3 t,\ y = z = a \cdot \sin^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

41. $\vec{F} = 2xy \cdot \vec{i} - z^2 \cdot \vec{j} + x^3 \cdot \vec{k}, \quad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3,$

$$\Gamma_2:\ x = R \cdot \cos t, y = R \cdot \sin t, z = R,\ \frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{3};$$

$$\Gamma_2:\ x = \frac{R - t}{2}, y = \frac{(R - t) \cdot \sqrt{3}}{2}, z = R,\ 0 \le t \le R;$$

$$\Gamma_3:\ x = \frac{t\sqrt{3}}{2}, y = \frac{t}{2}, z = R,\ 0 \le t \le R.$$

Найти потенциалы вектор-функций:

42. $\vec{F} = \left(3x^2 + 8xy + 2y^2\right)\vec{i} + (4x^2 + 4xy + 15y^2)\vec{j}.$

43. $\vec{F} = e^{x-y}\cos\left(x + y\right)\vec{i} + e^{x-y}\sin\left(x + y\right)\vec{j}.$

44. $\vec{F} = \sin 2x\,\mathrm{sh}\left(1 + 2y\right)\vec{i} + \cos 2x\,\mathrm{ch}\left(1 + 2y\right)\vec{j}.$

45. $\vec{F} = \left(2x - 2xy\right)\vec{i} + \left(x^2 - (y-1)^2\right)\vec{j}.$